

حيور لن القابلية للحل:
 من حيث ب ب

تقريب: ليكن A جبر لن فوق الحلق (تيليت واداميت) R لنضع:

$$D^0 A = A$$

$$D^1 A = [A, A]$$

$$D^2 A = [D^1 A, D^1 A]$$

$$\vdots$$

$$D^{k+1} A = [D^k A, D^k A]$$

ولاحظ لك $n \in \mathbb{N}$ لعرف $D^n A$ بالشكل:
 $D^n A = [D^{n-1} A, D^{n-1} A]$

تقريبات:
 ليكن A جبر لن فوق الحلق R عندئذ:
 1- أياً كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $D^n A$ مثالي محيز في A
 2- أياً كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $D^{n+1} A \subseteq D^n A$
 البرهان:

1- نعلم أن A مثالي محيز في A
 ومما كان $D^0 A, D^1 A, D^2 A$ جبراً مثاليين محيزين في A
 جميعها مثاليات محيزة في A
 لنفرض أنه لأجل $k \in \mathbb{N}$ فإن $D^k A$ مثالي محيز في A
 عندئذ:

$$D^{k+1} A = [D^k A, D^k A]$$

وبما أن $D^k A$ محيز فإن جبراً مثاليين محيزين في A
 محيز فإن $D^{k+1} A$ مثالي محيز
 إذ أن لأجل $\forall n \in \mathbb{N}$ فإن $D^n A$ مثالي محيز في A

2- بالاستقراء حسب n

$$n=0 \quad DA = [A, A] \subseteq A = D^0 A$$

$$n=1 \quad D^2 A = [DA, DA] \subseteq [A, A] = DA$$

لنفرض أن $k \in \mathbb{N}$ وأن

$$D^k A \subseteq D^{k-1} A$$

$$D^{k+1} A = [D^k A, D^k A] \subseteq [D^{k-1} A, D^{k-1} A] = D^k A$$

وبذلك نأصل $D^{n+1} A \subseteq D^n A$: $n \in \mathbb{N}$ فإن:* **تقديرات [2]:** ليكن A حيدلي فوق الحلقة R عندئذ:1- أيا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $D^n A$ مثالي في A 2- أيا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $D^n A$ مثالي محيز في A 3- أيا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $D^{n+1} A$ مثالي في $D^n A$ 4- أيا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن $D^{n+1} A$ مودول جزئي في $D^n A$

$$5- A = D^0 A \supseteq DA \supseteq D^2 A \supseteq \dots$$

البرهان:

[2] و [3] حسب التقديرات السابقة.

1- يتبع من كون DA مثالي محيز في A هو مثالي في A .3- من أجل $n=0$ لدينا $D^0 A = A \supseteq DA = [A, A]$ و DA كان مثالي في A فإن $D^2 A$ مودول جزئي في DA

$$D^2 A = [DA, DA] \subseteq DA \quad \text{فإن}$$

و $D^2 A$ كان مثالي في A يكون $D^3 A$ مثالي في DA لنفرض أن k أجل $D^k A$ مثالي في $D^{k-1} A$

$$D^{k+1} A = [D^k A, D^k A] \subseteq D^k A$$

عندئذ:

وهذا يعني أن $D^{k+1}A$ صافي في D^k .

4. حسب [3] طابع يكون مودول جزئي.

(د) تعريف: ليكن A حيز لي فوق الحلق R نقول A أن
 «قابل للحل» إذا وجد عدد صحيح موجب $m \in \mathbb{N}$ بحيث $D^m A = 0$ يعني «قابل للحل»
 ونسعى أبسط عدد $m \in \mathbb{N}$ لأجل $D^m A = 0$ «أبسط قابلية»
 الحل.

ونقول عن المثال I أن قابلية للحل في A إذا وجد
 $K \in \mathbb{N}$ لأجل يكون $D^K I = 0$
 ونسعى أبسط مثال قابلية للحل في A «أساسية الجبر A »
 ونرمز له $\text{Rad } A$.

* مبرهنات: فهاذا يعني أن قابلية للحل نقل
 لك حيز لي فوق حقل K بعد 2 يكون قابلية للحل
 البرهان:

نفرض أن A حيز لي فوق الحقل K وأن $\dim A = 2$
 ونفرض أن $A = \{e_1, e_2\}$ قاعدة للحيز A فوق K
 عن شئ: أيا كان $x \in A$ فإن x يكتب بصورة وحيدة على
 الشكل $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ حيث $\alpha_1, \alpha_2 \in K$
 ليكن $z \in DA = [A, A]$ عن شئ:
 يوجد $x, y \in A$ بحيث $z = [x, y]$
 نختار ما يلي:

الحالات الأولى: إذا كان $[e_1, e_2] = \alpha e_1$
 حيث $\alpha \in K, \alpha \neq 0$

وملا S قاعدة للجبر A فإن

$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ و $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ حيث $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$

$$Z = [x, y] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2]$$

$$= [\alpha_1 e_1, \beta_1 e_1] + [\alpha_1 e_1, \beta_2 e_2] + [\alpha_2 e_2, \beta_1 e_1] + [\alpha_2 e_2, \beta_2 e_2]$$

$$= \alpha_1 \beta_1 [e_1, e_1] + \alpha_1 \beta_2 [e_1, e_2] + \alpha_2 \beta_1 [e_2, e_1] + \alpha_2 \beta_2 [e_2, e_2]$$

$$= \alpha_1 \beta_2 [e_1, e_2] - \alpha_2 \beta_1 [e_1, e_2]$$

$$= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) [e_1, e_2]$$

$$Z = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \alpha e_1$$

لنفرض أن $\lambda = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \alpha$

فإن $\lambda = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \alpha$

$$Z = \lambda e_1$$

وهذا يعني أن $DA = \{\mu e_1, \mu \in K\}$ فضاء جزئي من A

لبعد 1

أي أن $DA \neq 0$

ليكن $z_0 \in D^2 A$ حيث $D^2 A = [DA, DA]$ عندئذ يوجد

$$z_0 = [x_0, y_0] \text{ حيث } x_0, y_0 \in DA$$

$$x_0 = u e_1, y_0 = v e_1 \text{ حيث } u, v \in K$$

حيث $u, v \in K$

$$z_0 = [x_0, y_0] = [u e_1, v e_1] = u \cdot v [e_1, e_1] = 0$$

وهذا يعني أن $D^2 A = 0$ وهذا يعني أن A قابل للحل

بفرض الطريقة في إثبات أن $\beta e_2 = [e_1, e_2]$ حيث

$\beta \in K$ فإن A قابل للحل

الحالة الثانية:

$$\alpha, \beta \in K, [e_1, e_2] = \alpha e_1 + \beta e_2 \quad \text{إذا كان}$$

$$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$$

$$e'_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 \in A$$

$$e'_2 = \alpha e_1 - \beta e_2 \in A$$

لنفرض أن

ليس هو على أن المجموعة $\{e'_1, e'_2\}$ مستقلة خطياً فوق K

$$\lambda e'_1 + \mu e'_2 = 0 \quad \text{ليكن } \lambda, \mu \in K$$

$$\lambda = \mu = 0$$

$$\lambda \alpha e_1 + \lambda \beta e_2 + \mu \alpha e_1 - \mu \beta e_2 = 0$$

$$(\lambda \alpha + \mu \alpha) e_1 + (\lambda \beta - \mu \beta) e_2 = 0$$

$$(\lambda + \mu) \alpha = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 0 \quad \alpha \neq 0$$

$$(\lambda - \mu) \beta = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \quad \beta \neq 0$$

$$2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\mu = 0$$

وهذا يعني أن المجموعة $\{e'_1, e'_2\}$ مستقلة خطياً فوق K

ومستقلة المجموعة $\{e'_1, e'_2\}$ فأيضا الفضاء أولي لـ A

$$\text{ليكن } z \in DA = [A, A] \text{ عندها}$$

$$z = [x, y] \text{ و } x, y \in A$$

$$x = \gamma e_1 + \varepsilon e_2, \quad y = \eta e_1 + \varepsilon_1 e_2$$

$$\gamma, \eta, \varepsilon, \varepsilon_1 \in K$$

بموجب ذلك

$$z = [\gamma e_1 + \varepsilon e_2, \eta e_1 + \varepsilon_1 e_2]$$

$$= \gamma \eta [e_1, e_1] + \gamma \varepsilon_1 [e_1, e_2] + \varepsilon \eta [e_2, e_1] + \varepsilon \varepsilon_1 [e_2, e_2]$$

$$+ \varepsilon \varepsilon_1 [e_2, e_2] = (\gamma \varepsilon_1 - \varepsilon \gamma_1) [e_1, e_2]$$

$$\bullet [e_1, e_2] = [\alpha e_1 + \beta e_2, \alpha e_1 - \beta e_2]$$

$$= -\alpha \beta [e_1, e_2] + \beta \alpha [e_2, e_1] = -2\alpha \beta [e_1, e_2]$$

بفرض أن $[e_1, e_2] = e$ في

$$\cancel{2\alpha\beta e}$$

$$\cancel{2\alpha\beta e_1} \quad z = \underbrace{2\alpha\beta(\varepsilon \gamma_1 - \gamma \varepsilon_1)}_{\beta \in K} e$$

وهذا يعني أن DA فضاء جزئي في A يعني $1 \in 0$

$$DA = \{ u \cdot e \mid u \in K \}$$

إذاً $DA \neq 0$

$$z_0 \in D^2 A = [DA, DA] \quad \text{لأنه}$$

$$z_0 = [x_0, y_0] \quad x_0, y_0 \in DA$$

$$x_0 = u_1 e \quad y_0 = u_2 e$$

$$z = [x_0, y_0] = [u_1 e, u_2 e] = u_1 u_2 [e, e] = 0$$

إذاً وهذا يعني أن $0 = D^2 A \subseteq \text{فان الجبر } A \text{ قابل للحل}$

✿ **مبرهنة:** لكي يمر لـ A فوق حقل K ثلاثي الجبر قاعدة e_1, e_2, e_3 تحقق الشروط:

$$1. [e_1, e_2] = a e_1$$

$$2. [e_1, e_3] = b e_1$$

$$3. [e_2, e_3] = c e_1 - p e_2 + q e_3$$

حيث $a, b, c, p, q \in K$ يمكن أن يكون قابلاً للحل

1. البرهان:

: لنثبت $DA = [A, A] \xrightarrow{\text{نريد}} z \in DA$

$$z = [x, y]; \quad x, y \in A$$

$$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$$

$$y = \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3$$

$$; \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in K$$

$$z = [x, y] = [\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3, \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3]$$

$$= \alpha \beta' [e_1, e_2] + \alpha \gamma' [e_1, e_3] + \beta \alpha' [e_2, e_1] + \beta \gamma' [e_2, e_3]$$

$$+ \gamma \alpha' [e_3, e_1] + \gamma \beta' [e_3, e_2]$$

$$= (\alpha \beta' - \beta \alpha') [e_1, e_2] + (\alpha \gamma' - \gamma \alpha') [e_1, e_3]$$

$$+ (\beta \gamma' - \gamma \beta') [e_2, e_3] = (\alpha \beta' - \beta \alpha') a e_1$$

$$+ (\alpha \gamma' - \gamma \alpha') b e_1 + (\beta \gamma' - \gamma \beta') (c e_1 - \{ b e_2 + f a e_3 \})$$

$$= (\alpha \beta' - \beta \alpha') a - (\alpha \gamma' - \gamma \alpha') b + (\beta \gamma' - \gamma \beta') c) e_1$$

$$\theta \in K$$

$$+ (\beta \gamma' - \gamma \beta') \{ b \} e_2 + (\beta \gamma' - \gamma \beta') \{ a \} e_3$$

$$= \theta e_1 + \underbrace{(\gamma \beta' - \beta \gamma')}_{\lambda \in K} \underbrace{\{ b e_2 - a e_3 \}}_{\in A}$$

$$z = \theta e_1 + \lambda e \quad ; \quad \theta, \lambda \in K$$

$$e_1, e \in A$$

$$D^2A = [DA, DA] \quad \text{ليكن } z_0 \in D^2A$$

$$z_0 = [x_0, y_0] \quad \text{و } x_0, y_0 \in DA$$

ادأ ليكن ان هكس:

$$x_0 = \theta_1 e_1 + \lambda_1 e$$

$$y_0 = \theta_2 e_1 + \lambda_2 e \quad \lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2 \in K$$

$$z_0 = [x_0, y_0] = \theta_1 \lambda_2 [e_1, e] + \lambda_1 \theta_2 [e_2, e_1]$$

$$= (\theta_1 \lambda_2 - \lambda_1 \theta_2) [e_1, e] = (\theta_1 \lambda_2 - \lambda_1 \theta_1) [e_1, be_2 - ae_3]$$

$$= (\theta_1 \lambda_2 - \lambda_1 \theta_2) (b[e_1, e_2] - a[e_1, e_3])$$

$$= (\theta_1 \lambda_2 - \lambda_1 \theta_2) (\underbrace{ba e_1 - ab e_1}_0) = 0$$

فصلا $D^2A = 0$ أي أن A قابل للحل

تحدد: ليكن A هيرلين فوق الحلقة R كيقف:

$$[[x, y], y] = 0 \quad \forall x, y, z \in A$$

$$[[x, y], z] = 0 \quad \forall x, y, z \in A$$

$$\forall x, y, z \in A$$

الكل:

ليكن $x, y, z \in A$ عندئذ:

$$x, y+z \in A$$

$$[[x, y+z], y+z] = 0$$

$$[[x, y], z] + [x, z], y+z = 0$$

$$[[x, y], y+z] + [[x, z], y+z] = 0$$

$$= [[x, y], y] + [[x, y], z] + [[x, z], y] + [[x, z], z] = 0$$

$$[[x, y], z] + [[x, z], y] = 0$$

$$[y, [x, z]] + [x, [z, y]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \text{لبنها}$$

$$[y, [x, z]] = -[x, [z, y]] - [z, [y, x]]$$

$$[x, [z, y]] = [x, [z, y]] + [z, [y, x]]$$

نعوّض في العلاقة الأخيرة

$$[[x, y], z] + [x, [z, y]] + [z, [y, x]] = 0$$

$$[[x, y], z] + [[x, y], z] + [x, [z, y]] = 0$$

$$2[[x, y], z] + [x, [z, y]] = 0 \quad (*)$$

$$[x, [z, y]] + [z, [y, x]] + [y, [x, z]] = 0$$

$$[x, [z, y]] = -[z, [y, x]] - [y, [x, z]]$$

$$= +[[y, x], z] + [[x, z], y]$$

لنعوّض في (*)

$$2[[x, y], z] + [[y, x], z] + [[z, x], y] = 0$$

**

$$[[y, x+z], x+z] = 0$$

حسب المبرهن

$$[[y, x] + [y, z], x+z] = [[y, x], x+z] + [y, x+z]$$

$$= [[y, x], x+z] + [[y, z], x+z] = 0$$

$$= [[y, x], x] + [[y, x], z] + [[y, z], x] + [[y, z], z] = 0$$

$$[[y, x], z] + [[y, z], x] = 0$$

①

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

لهذا:

$$[[y, z], x] = [y, [z, x]] + [z, [x, y]]$$

نؤيدن في ①

$$[[y, z], x] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

$$2[[y, z], x] + [y, [z, x]] = 0$$

②

لنبرهن ② بالـ **

$$[y, [z, x]] + [x, [z, y]] \neq 0$$

$$[y, [z, x]] + [[y, x], z] + [[x, z], y] = 0$$

$$2[y, [z, x]] + [[y, x], z] = 0$$

$$[[x, y], z], y + z] = 0$$

لدينا
وجبات

$$\bullet 2[[x, y], z] + [[x, y], [z, y]] = 0$$

$$[[y, x + z], x + z] = 0$$

لدينا
وجبات
سهل

$$\bullet [[x, y], z] + [[y, z], x] = 0$$

$$[[x, y], z] + [x, [y, z]] = 0$$

$$3[[x, y], z] = 0$$

$$[] = 0 \quad [] \in R, [] \in \text{مركز}$$

تعتبر $[]$ أن: $[]$ هي مركبة من مركبات المتركبات السابقة. واعتماداً على تعريف $[]$ يمكن أن يكون قابلاً للتركيب.

البرهان:

ليكن A قابلاً للتركيب فوق الحلقة R وليكن B قابلاً للتركيب في A عندها يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $D^n A = 0$.

لنبرهن أولاً أن $D^n B \subseteq D^n A = 0$ يمكن أن نبرهن على ذلك من n

$$D^0 B = B \subseteq A = D^0 A \quad \text{ولكن } D^0 B = 0 \text{ حيث } D^0 B = 0$$

$$D^1 B = [B, B] \subseteq [A, A] = D^1 A$$

افترضنا بفرض أن $n = k$ فإن

$$D^k B \subseteq D^k A$$

$$D^{k+1} B$$

فيكون

$$D^{k+1} B = [D^k B, D^k B] \subseteq [D^k A, D^k A] \subseteq D^{k+1} A$$

$$D^n B = 0 \quad \Leftarrow$$

تعتبر $[]$ أن: $f: A \rightarrow A'$ تماثل جبر لـ R عندها $f([A, A]) = [f(A), f(A)]$

2- إذا كان A قابلاً للتركيب فإن $\text{Im } f$ يمكن أن يكون قابلاً للتركيب.

البرهان:

1- ليكن $y \in f([A, A])$ عندها $y = f(x)$ و $x \in [A, A]$

$$x = [a, b] \quad \text{و } a, b \in A$$

$$y = f(x) = f([a, b]) = [f(a), f(b)] \in [f(A), f(A)]$$

$$f([A, A]) \subseteq [f(A), f(A)]$$

الاحتمال المتكامل في نظرية المجموعات

2- نوجب $n \in \mathbb{N}$ حيث $D^n A = 0$ لنبرهن على أن لأجل كل $k \in \mathbb{N}$ فإن $f(D^k A) = D^k f(A)$

$$n=0 \quad f(A) = f(A)$$

$$f(D^0 A) = D^0 f(A)$$

$$n=1$$

$$DA = [A, A]$$

$$f(DA) = f([A, A]) = [f(A), f(A)] = Df(A)$$

لنقرن أن المبراهة صحيحة لأجل t

$$f(D^t A) = D^t f(A)$$

$$f(D^{t+1} A) = f([D^t A, D^t A]) = [f(D^t A), f(D^t A)]$$

$$= [D^t f(A), D^t f(A)] = D^{t+1} f(A)$$

$$D^n f(A) = f(D^n A) = f(0) = 0$$

وهذا يبين أن الحيز البزني $\text{Im } f$ قابل للحل.

نتيجة: ليكن A حيزاً قابلاً للحل و I مثالي في A عندئذٍ حيز A/I الخارج A/I قابل للحل.

البرهان:

وحيث أن الخريطة $\pi: A \rightarrow A/I$ المبردة بالتكامل

$$\forall a \in A: \pi(a) = a + I$$

وهي التقوية السابقة فإن $\text{Im } \pi = A/I$ قابل للحل

~~~~~